物理実験の基礎第一 資料 No.1 「線形応答系とフーリエ変換」

1 線形応答系

物理の実験では、測定を行いたい系に対して外部から刺激（力学系なら外力、電気系なら電気信号）を加え、その応答を調べるということで系の性質を調べるという場合がある。この場合の系の振る舞いの一般論を行うのは難しいが、応答が線形の場合には、詳しい議論ができる。このような系は、線形の微分（積分）方程式で記述される。

今、系が線形の演算子 $\mathcal{L}$ によって

$$\mathcal{L}\left[p(t)\right] = q(t) \tag{1}$$

という方程式で表されるとする。ここで、$\mathcal{L}$ が線形とは、

$$\mathcal{L}\left[p_1(t)\right] = q_1(t) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}\left[p_2(t)\right] = q_2(t) \tag{3}$$

が成り立ち、α、β を定数としたら

$$\mathcal{L}\left[\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)\right] = \alpha q_1(t) + \beta q_2(t) \tag{4}$$

が成り立つ場合である。

2 インパルス応答関数

この線形系の性質（重ねあわせの原理）を用いると、簡単な関数を加えた時の解を求めておけば、それを重ねあわせて任意の関数に対する解（応答）を求めることができる。たとえば、デルタ関数の性質

$$q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t')\delta(t-t')\mathrm{d}t' \tag{5}$$

は、時刻 t' に $q(t')$ の大きさのデルタ関数（インパルス）があり、これを重ねあわせたものとして $q(t)$ が表現できることを示している。もし、この線形系のインパルスに対する応答がわかっていれば、重ねあわせの原理により解を求めることができるを示している。

そこで、式 (1) の解を

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t|t')q(t')\mathrm{d}t' \tag{6}$$

という形で求めることにする。この両辺に $\mathcal{L}$ を施すと、$G(t|t')$ は

$$\mathcal{L}\left[G(t|t')\right] = \delta(t-t') \tag{7}$$

を満たす必要があることが分かる。式 (7) を見ると、$G(t|t')$ は、時刻 $t = t'$ に δ 関数によるパルスが入力された時の系の応答と考えることができる。そこで、インパルス応答関数と呼ばれる[1]。

求めるべき解は、入力 q と系 $\mathcal{L}$ の 2 つの性質で決まっている。しかし、基本的でしかも簡単に解が求まる入力を使って系の性質のみを抜き出したものがあれば、それを使って一般的な入力に対する解を求めることができるのである。インパルス応答関数（グリーン関数）は、その一つの例である。

[1] この関数 $G(t|t')$ はグリーン関数とも呼ばれる。

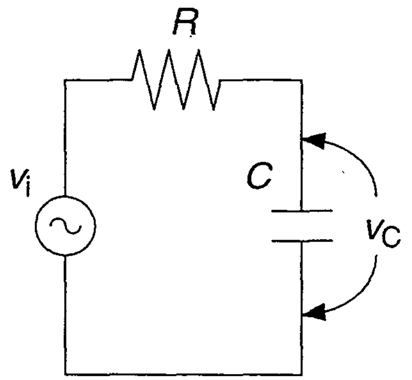

図 1: 抵抗とコンデンサーの直列回路

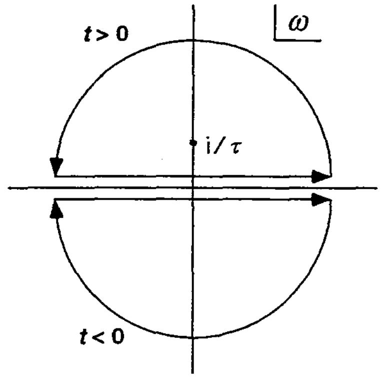

図 2: インパルス応答関数を求める際の積分路。図中の τ は RC で与えられる。

3 簡単な例

一番簡単な例として、抵抗とコンデンサーの直列回路に電圧 $v_{\mathrm{i}}(t)$ の電源を繋ぎ、コンデンサーの両端の電圧 $v_{\mathrm{C}}(t)$ を測定する場合を解く（図 1）。この時の方程式は

$$Ri + \frac{q}{C} = v_{\mathrm{i}}, \quad \dot{q} = i, \quad v_{\mathrm{C}} = q/C \tag{8}$$

で、整理すると

$$RC\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{C}} = v_{\mathrm{i}} \tag{9}$$

となる。この解は、定数変化法を用いると簡単に解ける。すなわち、$v_{\mathrm{i}} = 0$ の時の解、$v_{\mathrm{C}} = a\exp(-t/RC)$ の a を時間の関数 $a(t)$ として、式 (9) に代入する。すると、

$$RC\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t/RC} = v_{\mathrm{i}}(t) \tag{10}$$

が得られる。これは簡単に積分できて

$$a(t) = a_0 + \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} v_{\mathrm{i}}(t')\mathrm{e}^{t'/RC}\mathrm{d}t' \tag{11}$$

となる。だから、

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-t')/RC} v_{\mathrm{i}}(t')\mathrm{d}t' \tag{12}$$

である。ただし、条件は $v_{\mathrm{c}} = 0$ $(t \to -\infty)$ とした。この式をみると

$$G(t|t') = \frac{1}{RC}\theta(t-t')\mathrm{e}^{-(t-t')/RC} \tag{13}$$

とすればいいことが分かる。ここで、$\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{14}$$

で定義される階段関数である。

インパルス応答関数が $t - t' < 0$ で値が 0 となるのはインパルスによる刺激をうけない時は何も起きないという意味である。これは、インパルスが原因になり、その結果として応答が起きるという因果律を表現している。一般に、因果律を満たす系では $t - t' < 0$ で $G = 0$ でなければならない。

もちろん、インパルス応答関数には初期条件を満たすパラメータが無い。したがって、得られる解は特解である。そのため、斉次の方程式（$\mathcal{L}[p]=0$）の解を付け加えて、解を構成しないといけない。ただ、因果律を満たす系が定常的な場合は、十分時間が経過すると、初期条件の情報は失われてしまい、入力に対する出力が表れるようになる。物理では、ある入力に対する出力を調べて系の情報を得る、つまり、q を与えて、p を測定し $\mathcal{L}$ がどのような性質を持つかを調べる場合が多い。この場合は、初期条件はあまり意味が無いので、特解だけを考えておけば十分である。

4　周波数応答関数

この計算では、入力の関数がデルタ関数の重ねあわせで表わすことができるという事実を用いて計算を行った。しかし、実験では、このようなインパルスを系に加えて測定を行う場合よりも、正弦関数を加えて測定をする場合が多い。

すなわち、$q(t)=\exp(\mathrm{i}\omega t)$ として、その解が $p(t)=H(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)$ と表わせるとする[2]。すると、系の性質は $H(\omega)$ という関数（複素数）で表わされる。たとえば、式 (9) の入力を正弦波とすると

$$RC\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}+v_\mathrm{C}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{15}$$

で表わされる。この解は $v_\mathrm{C}(t)=H(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)$ と置くと

$$(\mathrm{i}\omega RC+1)H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{16}$$

だから、

$$H(\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega RC} \tag{17}$$

となり、解を容易に求めることができる。この $H(\omega)$ は正弦波に対する系の応答を示しているので、周波数応答関数と呼ばれる。しかも、系の記述するパラメータ（ここでは、R と C）のみを含み、系を特徴づけるものである。

ただし、このような周波数応答関数はすべての線形系に存在するわけではない。たとえば、ブランコの運動をモデル化して表わす方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{L_0}(1-h\cos\Omega t)x=0 \tag{18}$$

に対して、$\exp(\mathrm{i}\omega t)$ に比例する正弦的な外力を加えても、解は単純に $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ に比例する形にならない。これは、系を記述する演算子が陽に時間の関数を含んでいるためである。

この周波数応答関数が存在するための条件は、演算子が定常であることである。すなわち、式 (1) で、$t\to t-t'$ のように時間を平行移動した場合にも、同様な関係

$$\mathcal{L}\left[p(t-t')\right]=q(t-t') \tag{19}$$

が成り立つ場合である。

これ以降は、系は定常であると仮定する。インパルス応答関数がインパルスに対する応答を表わし、周波数応答関数は正弦波に対する応答を表わしているが、これらは共に系の性質を記述するものであり、独立ではない。その性質を議論する。もし、入力信号がいくつかの正弦波の重ねあわせで表わされているとしよう。すなわち

$$q(t)=\sum Q_n\exp(\mathrm{i}\omega_n t) \tag{20}$$

[2]実際の解は、入力、出力共に実部をとるという約束をする。

のとき、解は周波数応答関数を用いて

$$p(t) = \sum H(\omega_n) Q_n \exp(\mathrm{i}\omega_n t) \tag{21}$$

で表わされる。もし、任意の関数がこのように正弦波の重ね合わせで表わすことができれば、周波数応答関数を用いて、解を表わすことが可能である。この議論を行うためには、フーリエ変換という数学的な手法が必要となる。

5 フーリエ級数とフーリエ変換

今、$f(t)$ を周期 t_0 の周期関数とすると $f(t)$ はフーリエ級数で展開できる。すなわち、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/t_0} \tag{22}$$

$$c_n = \frac{1}{t_0}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt/t_0}\mathrm{d}t \tag{23}$$

である。ここで、$f(t)$ の 2 乗平均を考えると

$$\frac{1}{t_0}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} f(t)^2\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{24}$$

が成り立つ。これは信号を周波数成分に分解した時、$|c_n|^2$ の強度を持っていることを示している。今、正弦波の周波数間隔は $\Delta f = 1/t_0$ なので単位周波数当たりの密度に直すと $|c_n|^2/\Delta f$ のパワーを持つ。

次に、t_0 が非常に長い場合を考えよう。その時、

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/t_0}\frac{1}{t_0}\int_{-t_0/2}^{t_0/2} f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt'/t_0}\mathrm{d}t' \tag{25}$$

という式に対して、$\omega = 2\pi n/t_0$、$\Delta\omega = 2\pi/t_0$ を用いて、和を積分に置き換えると

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t-t')} f(t')\mathrm{d}t'\mathrm{d}\omega \tag{26}$$

が成り立つ。もし、積分の順序交換が可能ならば

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}\mathrm{d}t' \tag{27}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{28}$$

が成り立つ。ここで、$f(t)$ から $F(\omega)$ への変換をフーリエ変換、その逆の $F(\omega)$ から $f(t)$ 変換を逆フーリエ変換という[3]。

6 フーリエ変換の性質

フーリエ変換が存在するためには、積分が収束する必要がある。それを仮定していろいろな性質を述べる。

[3] $1/2\pi$ の因子の付け方や指数関数の符号などは教科書によってまちまちになっているので気を付けること。

導関数のフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty}-(-\mathrm{i}\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{i}\omega\int_{-\infty}^{\infty}f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\mathrm{i}\omega F(\omega) \tag{29}$$

のように、元の関数のフーリエ変換に $\mathrm{i}\omega$ を掛けたものになる。

積のフーリエ変換

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\Omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)G(\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega-\omega)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega-\Omega)G(\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{30}$$

となる。最後の積分は畳み込み積分と呼ばれる。逆変換の場合には、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(t')g(t-t')\mathrm{d}t' \tag{31}$$

とやはり、畳み込み積分で表わせる。

パーセバルの関係式　式 (31) において $G(\omega)=F^*(\omega)$ で $t=0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t')|^2\mathrm{d}t' \tag{32}$$

となる。これをパーセバルの関係式という。ここで、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=f^*(-t) \tag{33}$$

という関係を用いた。

7　フーリエ変換による常微分方程式の解法

考えている系が定常的な場合、フーリエ変換を用いて微分方程式を解くことができる。たとえば、インパルス応答を求める場合に利用できる。インパルス応答は

$$RC\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+G=\delta(t) \tag{34}$$

を満たさなければならない[4]。この式の両辺に $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ をかけて、$(-\infty,\infty)$ で積分するとフーリエ変換の関係に直すことができて、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(RC\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}+G\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=1 \tag{35}$$

となる。ところで、導関数に対するフーリエ変換の公式、式 (29) を用いると

$$(\mathrm{i}\omega RC+1)\int_{-\infty}^{\infty}G\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=1 \tag{36}$$

である。そこで、

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}G(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{37}$$

とすると

$$(\mathrm{i}\omega RC+1)H(\omega)=1 \tag{38}$$

[4] 方程式が時間の平行移動に対して不変なので $t-t'$ を t と考えて計算すればよい。

となる。ここで、$H(\omega)$ は $G(t)$ のフーリエ変換で、これを解けば、

$$H(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega RC} \tag{39}$$

である。これは、式 (17) と同じもので、系の周波数応答関数となる。つまり、インパルス応答関数と周波数応答関数はフーリエ変換で結ばれていて、周波数応答関数がわかれば、逆フーリエ変換により

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{40}$$

でインパルス応答関数を求めることができる。

この系の場合の逆変換は

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{1+\mathrm{i}\omega RC}\mathrm{d}\omega \tag{41}$$

である。この積分は複素関数論にしたがって、複素積分（留数計算）するだけであるが、t の符号によって、積分路を ω 平面の上半面に取る（$t>0$）か下半面に取る（$t<0$）かを変える必要がある（図 2)。今、極の位置は i/RC で上半面にあるだけだから、下半面で積分を行う場合は 0 となり、上半面では留数を計算すると、式 (13) と同じ結果が得られる。

前に述べたように、$H(\omega)$ は、$v_{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ とした時、$v_{\mathrm{c}} = H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ となるものである。そして、正弦波を入力したときの、出力の正弦波の振幅と位相を表していて、因果律を満たす系では $H(\omega)$ の極は、上半面にしか存在しないことが分かる。

また、$v_{\mathrm{i}}(t)$ のフーリエ変換を $V_{\mathrm{i}}(\omega)$ とすると、

$$v_{\mathrm{i}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{42}$$

$$v_{\mathrm{c}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{43}$$

と書ける。つまり、$v_{\mathrm{i}}(t)$ は、$V_{\mathrm{i}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ という正弦波の重ねあわせで表すことができ、正弦波に対する系の応答が $H(\omega)$ となることがわかっているので、出力はその重ねあわせで書くことができる。この考え方も、インパルス応答を考える場合と同じで入力と系の性質を分けて考えていることになる。さらに、普通の線形系は、有限次数の微分や積分の組み合わせで書かれるため、正弦波に対する応答を求めるのは非常に易しい。つまりフーリエ変換により、微分方程式が代数方程式に変換されるからである。さらに、代数方程式の解から、時間の関数を求める場合は、複素積分を実行することに帰着され、系統的な取り扱いが可能になる。線形系の典型的な例である電気回路では、その特性などについてはこの周波数応答関数で議論される方が多い。

8 フーリエ変換による偏微分方程式の解法

線形系は、常微分方程式だけでなく、偏微分方程式で記述される場合も多い。典型的な例はシュレディンガー方程式である。一次元の自由粒子のシュレディンガー方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(t,x)}{\partial x^2} \tag{44}$$

である。境界条件は $x \to \pm\infty$ で $\psi = 0$ としよう。この両辺に $\exp(-\mathrm{i}kx)$ をかけて $(-\infty, \infty)$ で積分する。これは、時間座標ではなく空間座標に対するフーリエ変換を計算する。そして、

$$\Psi(t,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \tag{45}$$

とすれば、式 (44) は

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi(t,k)}{\mathrm{d}t} = k^2\frac{\hbar^2}{2m}\Psi(t,k) \tag{46}$$

となり、この常微分方程式は簡単に解ける。すなわち、

$$\Psi(t,k) = \Psi(0,k)\exp\left(-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right) \tag{47}$$

である。ただし、

$$\Psi(0,k) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(0,x)e^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{48}$$

で与えられ、波動関数の初期条件を与える必要がある。そして、逆フーリエ変換により、

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t,k)e^{ikx}\mathrm{d}k \tag{49}$$

を計算すれば解が得られる。ところで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(t,k)e^{ikx}\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{\infty}\psi(0,x')e^{-ikx'}\mathrm{d}x'\exp\left(-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(0,x')\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}\exp\left(-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right)\mathrm{d}k\end{aligned} \tag{50}$$

と書ける。最後の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}\exp\left(-i\frac{\hbar k^2 t}{2m}\right)\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{2\pi m}{i\hbar t}}\exp\left(i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar t}\right) \tag{51}$$

で与えられるので、

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi m}{i\hbar t}}\exp\left(i\frac{m(x-x')^2}{2\hbar t}\right)\psi(0,x')\mathrm{d}x' \tag{52}$$

と形式的な解が求められる。

たとえば、初期条件として

$$\psi(0,x) = \frac{1}{(2\pi a^2)^{1/4}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2}\right) \tag{53}$$

を与え[5]、積分を実行すると

$$\psi(t,x) = \left(\frac{a}{\sqrt{2\pi}D(t)}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4D(t)}\right) \tag{54}$$

となる。ここで、

$$D(t) = a^2 + i\frac{\hbar t}{2m} \tag{55}$$

である。今、

$$|\psi(t,x)|^2 = \frac{a}{\sqrt{2\pi}|D(t)|}\exp\left(-\frac{a^2x^2}{2|D(t)|^2}\right) \tag{56}$$

だから、波束の広がりは

$$\sigma^2 = |D(t)|^2/a^2 = a^2 + \left(\frac{\hbar t}{2ma}\right)^2 \tag{57}$$

で与えられ、初期の波束の広がりの大きさが小さいほど速く広がることがわかる。

[5]
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(0,x)|^2\mathrm{d}x = 1$$
を満たす。

9　問題

1. 次の関数のフーリエ変換を計算せよ。ただし、$\eta > 0$ とする。
   (1) $e^{-\eta|t|}$ 、(2) $\theta(t)e^{-\eta t}$

2. 次の関数の逆フーリエ変換を計算せよ。ただし、$\eta > 0$ とする。
   (1) $1/(\eta + i\omega)$、(2) $1/(\eta^2 + \omega^2)$

3. 式 (51) と式 (54) を導け。ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x^2} dx = (1 - i)\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \ (\alpha > 0)$$

   を用いてよい。

補遺

A　ガウス関数のフーリエ変換

ガウス関数のフーリエ変換の計算は、しばしば必要となる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \ (\alpha > 0) \tag{58}$$

は既知とする。そこで、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha[x + ik/(2\alpha)]^2 - k^2/(4\alpha)] dx \\ &= e^{-k^2/(4\alpha)} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} e^{-\alpha z^2} dz \ \ (d = k/(2\alpha),\ \ z = x + id) \end{aligned} \tag{59}$$

となるが、複素関数論を用いると

$$\int_{-\infty+id}^{\infty+id} e^{-\alpha z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{60}$$

が成り立つことが示される。従って、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-k^2/(4\alpha)} \tag{61}$$

である。この結果を見ると、ガウス関数のフーリエ変換はガウス関数になることがわかる。

参考文献

[1] 今村勤：「物理とフーリエ変換」（岩波書店、1978 年）.

[2] 今村勤：「物理とグリーン関数」（岩波書店、1978 年）.